

《数学物理方法》第四版

梁昆森 著

§ 7.1 数学物理方程的导出

本节要导出一些典型的数学物理方程. 这里说的“导出”其实不过是用数学语言把物理规律“翻译”出来罢了. 通过这些典型方程的导出, 希望读者学会“翻译”技巧.

数学物理方程是物理规律的数学表述, 与定解条件无关, 所以在导出过程中用不着考虑定解条件.

物理规律反映的是某个物理量在邻近地点和邻近时刻之间的联系, 因此数学物理方程的导出步骤如下: 首先当然要确定研究哪一个物理量 u . 从所研究的系统中划出一个小部分, 根据物理规律分析邻近部分和这个小部分的相互作用(抓住主要的作用, 略去不那么重要的因素), 这种相互作用在一个短时间段里怎样影响物理量 u . 把这种影响用算式表达出来, 经简化整理就是数学物理方程.

下面导出常见的一些数学物理方程. 它们分别属于三种类型, 即波动方程(一~六, 十四)、输运方程(七、八)和稳定场方程(九~十三). 这大致对应于数学上的分类, 即双曲型、抛物型和椭圆型偏微分方程. 我们还将直接给出一些方程而不作推导.

(一) 均匀弦的微小横振动

演奏弦乐器(例如二胡, 提琴)的人用弓在弦上来回拉动. 弓所接触的只是弦的很小一段, 似乎应该只引起这个小段的振动, 实际上振动总是传播到整根弦, 弦的各处都振动起来.

振动是怎样传播的呢? 不妨认为弦是柔软的, 就是说在放松的条件下, 把弦弯成任意的形状, 它都保持静止. 可是在绷紧以后, 相邻小段之间有拉力, 这种拉力叫作弦中张力. 张力沿着弦的切线方向. 由于张力作用, 一个小段的振动必定带动它的邻段, 而邻段又带动它自己的邻段, ……这样, 一个小段的振动必然传播到整根弦. 这种振动传播现象叫作波.

弦乐器所用的弦往往是很轻的, 它的重量只有张力的几万分之一. 跟张力相比, 弦的重量完全可以略去. 这样, 真实的弦就抽象为“没有重量的”弦.

把没有重量的弦绷紧，它在不振动时是一根直线，就取这直线作为 x 轴(图 7-1)。把弦上各点的横向位移记作 u 。这样，横向位移 u 是 x 和 t 的函数，记作 $u(x, t)$ 。要推导的就是 u 所遵从的方程。

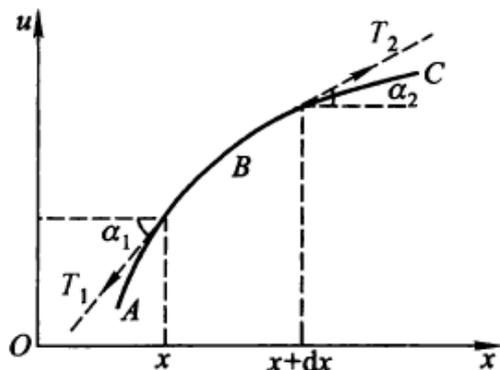


图 7-1

弦的振动是一种机械运动。机械运动的基本定律是质点力学的 $F = ma$ 。然而弦并不是质点，所以 $F = ma$ 对整根弦并不合用。但整根

弦可以细分为许多极小的小段，每个小段可以抽象为质点，就是说，整根弦由许多互相牵连的质点组成，对每个质点即每个小段可以应用 $F = ma$ 。

把弦细分为许多极小的小段。拿区间 $(x, x + dx)$ 上的小段 B 为代表加以研究。 B 既然没有重量而且是柔软的，它就只受到邻段 A 和 C 的拉力 T_1 和 T_2 。

弦的每小段都没有纵向(即 x 方向)的运动，所以作用于 B 的纵向合力应

为零。弦的横向加速度记作 u_{tt} (这是记号 $\partial^2 u / \partial t^2$ 的缩写)。按照 $F = ma$ ，小段 B 的纵向和横向运动方程分别为

$$\begin{cases} T_2 \cos \alpha_2 - T_1 \cos \alpha_1 = 0, & (7.1.1) \\ T_2 \sin \alpha_2 - T_1 \sin \alpha_1 = (\rho ds) u_{tt}. & (7.1.2) \end{cases}$$

式中 ρ 是弦的线密度，即单位长度的质量。 ds 为小段 B 的弧长。

我们将限于考虑小的振动。这时 α_1 、 α_2 为小量，如果忽略 α_1^2 、 α_2^2 以上的高阶小量，则

$$\begin{aligned} \cos \alpha_1 &\approx 1 - \alpha_1^2/2! + \dots \approx 1, & \cos \alpha_2 &\approx 1, \\ \sin \alpha_1 &\approx \alpha_1 - \alpha_1^3/3! + \dots \approx \alpha_1 \approx \tan \alpha_1, \\ \sin \alpha_2 &\approx \alpha_2 \approx \tan \alpha_2, \end{aligned}$$

$$ds = \sqrt{(dx)^2 + (du)^2} = \sqrt{1 + (u_x)^2} dx \approx dx$$

(其中 $u_x = \partial u / \partial x = \tan \alpha \approx \alpha$)，又 $\tan \alpha_1 = u_x|_x$ ， $\tan \alpha_2 = u_x|_{x+dx}$ 。这样，(7.1.1)和(7.1.2)简化为

$$\begin{cases} T_2 - T_1 = 0, & (7.1.3) \\ T_2 u_x|_{x+dx} - T_1 u_x|_x = u_{tt} \rho dx. & (7.1.4) \end{cases}$$

因此 $T_2 = T_1$ ，弦中张力不随 x 而变，它在整根弦中取同一数值。另一方面，在振动过程中的每个时刻都有长度 $ds \approx dx$ ，即长度 ds 不随时间而变，所

以作用于 B 段的张力也不随时间而变. 弦中张力既跟 x 无关, 又跟 t 无关, 只能是常数, 记为 T . (7.1.4) 成为

$$T(u_x|_{x+dx} - u_x|_x) = \rho u_{tt} dx.$$

由于 dx 取得很小, $u_x|_{x+dx} - u_x|_x = (\partial u_x / \partial x) dx = u_{xx} dx$ (其中 u_{xx} 是 $\partial u_x / \partial x = \partial^2 u / \partial x^2$ 的缩写). 这样, B 段的运动方程就成为

$$\rho u_{tt} - T u_{xx} = 0. \quad (7.1.5)$$

其实, 作为代表的 B 段是任选的, 所以方程 (7.1.5) 适用于弦上各处, 是弦作微小横振动的运动方程, 简称为弦振动方程.

对于均匀弦, ρ 是常数, (7.1.5) 通常改写为

$$u_{tt} - a^2 u_{xx} = 0, \quad (7.1.6)$$

其中 $a^2 = T/\rho$. 以后会看到 a 就是振动在弦上传播的速度.

质点的位移仅是时间 t 的函数, 质点的运动方程也就是以时间 t 为自变数的常微分方程. 而弦的位移 u 是时间 t 和坐标 x 两个自变数的函数, 弦的运动方程则是以 x 和 t 为自变数的偏微分方程. 它是弦上许多彼此相牵连的质点的运动方程, 质点之间的牵连反映在 u_{xx} 项.

如果弦在振动过程中还受到外加横向力的作用, 每单位长度弦所受横向力为 $F(x, t)$, 则应将 (7.1.2) 修改为 $T_2 \sin \alpha_2 - T_1 \sin \alpha_1 + F(x, t) dx = (\rho ds) u_{tt}$. 与此相应, (7.1.6) 修改为

$$u_{tt} - a^2 u_{xx} = f(x, t). \quad (7.1.7)$$

式中 $f(x, t) = F(x, t)/\rho$ 称为力密度, 为 t 时刻作用于 x 处单位质量上的横向外力. (7.1.7) 称为弦的受迫振动方程, 而 (7.1.6) 称为弦的自由振动方程.

(二) 均匀杆的纵振动

这里要推导的是杆上各点沿杆长方向的纵向位移 $u(x, t)$ 所遵从的方程.

一根杆, 只要其中任一小段有纵向移动, 必然使它的邻段压缩或伸长, 这邻段的压缩或伸长又使其自己的邻段压缩或伸长, …… 这样, 任一小段的纵振动必然传播到整根杆. 这种振动的传播就是波.

把杆细分为许多极小的小段. 拿区间 $(x, x + dx)$ 上的小段 B (图 7-2) 为代表加以研究. 在振动过程中, B 两端的位移分别记作 $u(x, t)$ 和 $u(x + dx, t) = u + du|_t$. 显然, B 段的伸长即是 $u(x + dx, t) - u(x, t) = du|_t$, 而相对伸长则是

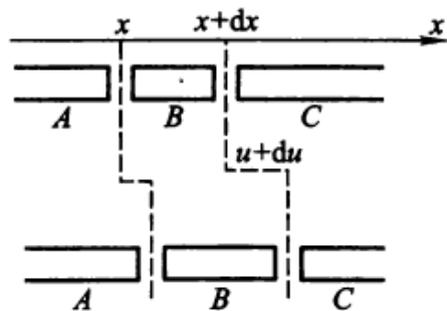


图 7-2

$$[u(x+dx, t) - u(x, t)]/dx = du|_x/dx = u_x dx/dx = u_x.$$

确切些说, 在杆作纵振动时, 相对伸长 u_x 还随地点而异. 在 B 的两端, 相对伸长就不一样, 分别是 $u_x|_x$ 和 $u_x|_{x+dx}$. 如果杆的材料的杨氏模量是 E , 根据胡克定律, B 两端的张应力(即单位横截面两方的相互作用力)分别是 $Eu_x|_x$ 和 $Eu_x|_{x+dx}$. 于是, 写出 B 段的运动方程

$$\begin{aligned} \rho(Sdx)u_{tt} &= ESu_x|_{x+dx} - ESu_x|_x \\ &= ES\partial u_x/\partial x dx, \end{aligned}$$

式中 ρ 为杆的密度, S 为杆的横截面积. 用 Sdx 遍除上式各项, 得

$$\rho u_{tt} - E u_{xx} = 0. \quad (7.1.8)$$

这就是杆的纵振动方程.

对于均匀杆, E 和 ρ 是常数, (7.1.8) 可以改写成

$$u_{tt} - a^2 u_{xx} = 0, \quad (7.1.9)$$

其中 $a^2 = E/\rho$. 这跟弦振动方程(7.1.6)形式上完全相同. a 也就是纵振动在杆中传播的速度.

杆的受迫纵振动方程也跟弦的受迫振动方程(7.1.7)完全一样, 只是其中 $F(x, t)$ 应是杆的每单位长度上每单位横截面积所受纵向外力.

(三) 传输线方程(电报方程)

对于直流电路和低频交流电路, 线与线之间的电容与电感可以忽略不计, 电路的基尔霍夫定律指出, 同一支路中的电流相等. 但对于较高频率的交变电流(不过, 这里也不考虑频率很高以致显著地向外发射电磁波的情况), 电路中导线的自感和电容的效应不能忽略, 因而同一支路中的电流未必相等.

考虑双线或同轴传输线(图 7-3a). 电容和电感是沿着传输线连续分布的, 为了运用熟知的分立元件的电路定律, 把传输线划分为许多小段, 取 x 与 $x+dx$ 之间的一段作为代表加以研究. 把每单位长度的传输线所具有的导线电阻、线间电漏、电容和电感分别记作 R, G, C 和 L . 我们所研究的小段可以看作是分立的电阻 Rdx 和自感 Ldx 串接在线路中, 分立的电容 Cdx 和漏电阻 $(1/G)dx$ 跨接在两线之间. 画出等效电路如图 7-3b. 这个小段两端的电流并不相等, 这是由于两线之间的漏电流 $(Gdx)v$, 还有两线之间的电容 Cdx 上的充放电. 这个小段两端的电压也不相等, 这是由于导线电阻 Rdx 上的电压降 $(Rdx)j$ 和两线之间的电感 Ldx 上的感生电动势 $(Ldx)\partial j/\partial t$, 这样,

$$\begin{cases} dj = -Gvdx - \frac{\partial}{\partial t}(Cvdx), \\ dv = -Rjdx - Lj_1 dx. \end{cases}$$

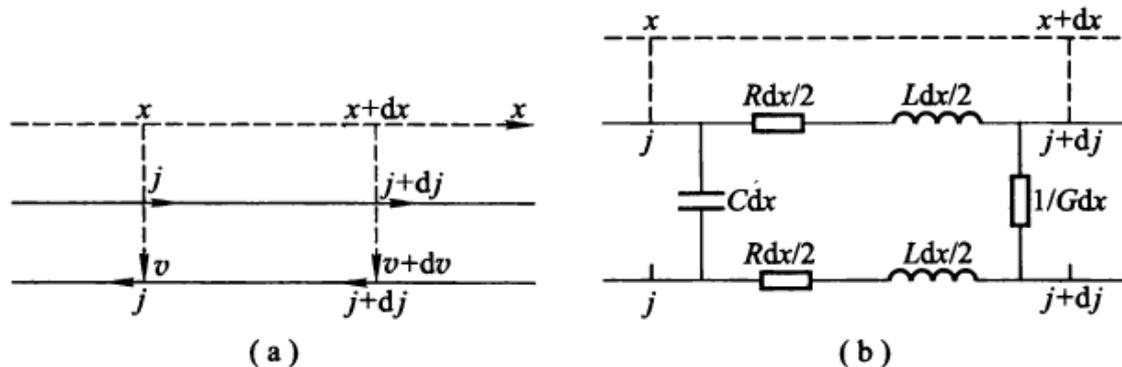


图 7-3

即

$$\begin{cases} j_x = -Gv - Cv_t, \\ v_x = -Rj - Lj_t. \end{cases} \quad (7.1.10)$$

亦即

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial x} j + \left(G + C \frac{\partial}{\partial t} \right) v = 0, \\ \left(R + L \frac{\partial}{\partial t} \right) j + \frac{\partial}{\partial x} v = 0. \end{cases} \quad (7.1.11)$$

以 $\partial/\partial x$ 作用于(7.1.11)的第一式, 以 $(G + C\partial/\partial t)$ 作用于第二式, 两者相减就消去 v , 得 $j(x, t)$ 的方程

$$LCj_{tt} - j_{xx} + (LG + RC)j_t + RGj = 0. \quad (7.1.12)$$

以 $(R + L\partial/\partial t)$ 作用于(7.1.11)的第一式, 以 $\partial/\partial x$ 作用于其第二式, 两者相减就消去 j , 得 $v(x, t)$ 的方程

$$LCv_{tt} - v_{xx} + (LG + RC)v_t + RGv = 0. \quad (7.1.13)$$

导线电阻 R 和线间电漏 G 很小的传输线叫作理想传输线. 对于理想传输线, (7.1.12)和(7.1.13)可以简化为

$$j_{tt} - a^2 j_{xx} = 0 \text{ 和 } v_{tt} - a^2 v_{xx} = 0, \quad (7.1.14)$$

其中 $a^2 = 1/LC$ (参看 § 14.2 例 3, $1/LC =$ 光速平方).

方程(7.1.12)和(7.1.13)以及它们的特例(7.1.14)叫作传输线方程(电报方程). 传输线方程(7.1.14)跟弦振动方程(7.1.6)、杆纵振动方程(7.1.9)又是完全一样, 尽管它们的物理本质根本不同.

(四) 均匀薄膜的微小横振动

把柔软的均匀薄膜张紧，静止薄膜的平面记作 xy 平面。研究膜在垂直于 xy 平面方向的微小横振动，膜上各点的横向位移记为 $u(x, y, t)$ 。“膜是柔软的”，这是说，在膜的切平面的法线方向不存在剪应力。如果在膜上划一直线（参看图 7-4a，图面垂直于所划直线），直线两方的膜必互相牵引。每单位长直线两方的牵引力叫作张力。与弦的微小横振动相类似，膜上张力也是常数，记为 T 。直线上任一点的张力 T 在该点的切平面内，其方向垂直于直线。记张力 T 的“仰角”（张力方向与 xy 平面的夹角）为 α （见图 7-4a），对于小振动， $\alpha \approx 0$ ，所以，张力 T 的横向分量 $= T \sin \alpha \approx T \tan \alpha = T \partial u / \partial n$ ， n 指的是张力 T 在 xy 平面上的投影方向，即直线在 xy 平面的投影的法线方向。

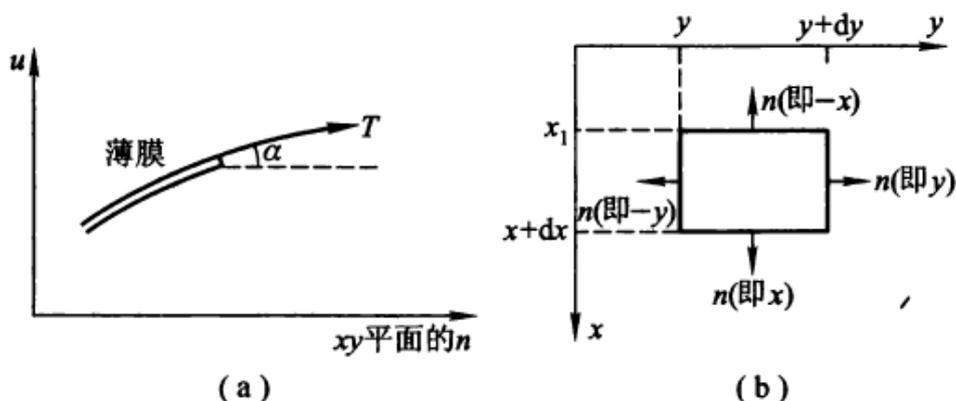


图 7-4

把薄膜细分为许多极小的小块。拿 x 与 $x + dx$ 之间， y 与 $y + dy$ 之间的小块（图 7-4b）为代表加以研究。

先看 x 和 $x + dx$ 这两边。作为代表的小块膜受邻近部分的张力作用，张力的横向分力分别是 $-T \partial u / \partial x |_{x}$ 和 $T \partial u / \partial x |_{x+dx}$ 。这样，这小块膜在 x 和 $x + dx$ 两边所受横向作用力是

$$[Tu_x|_{x+dx} - Tu_x|_x] dy = Tu_{xx} dx dy.$$

同理，在 y 和 $y + dy$ 两边所受横向作用力是

$$Tu_{yy} dx dy.$$

用 ρ 表示单位面积的薄膜的质量，可以写出这小块膜的横向运动方程

$$\rho u_{tt} dx dy = Tu_{xx} dx dy + Tu_{yy} dx dy,$$

即

$$\rho u_{tt} - T(u_{xx} + u_{yy}) = 0. \quad (7.1.15)$$

这就是薄膜微小振动方程. $\partial^2/\partial x^2 + \partial^2/\partial y^2$ 叫作二维拉普拉斯算符, 通常记作 Δ , 或者为了强调二维而记作 Δ_2 . 这样, (7.1.15) 可以记作

$$\rho u_{tt} - T\Delta_2 u = 0.$$

对于均匀薄膜, 面密度 ρ 是常数. (7.1.15) 可以改写成

$$u_{tt} - a^2 \Delta_2 u = 0. \quad (7.1.16)$$

式中常数 $a^2 = T/\rho$, a 为膜上振动的传播速度.

如果薄膜上有横向外力作用, 记单位面积上的横向外力为 $F(x, y, t)$, 重复上述步骤, 则得薄膜的受迫振动方程

$$u_{tt} - a^2 \Delta_2 u = f(x, y, t). \quad (7.1.17)$$

其中 $f(x, y, t) = F(x, y, t)/\rho$ 为作用于单位质量上的横向外力.

(五) 流体力学与声学方程

流体力学中研究的物理量是流体的流动速度 v 、压强 p 和密度 ρ . 对于声波在空气中的传播, 相应地要研究空气质点在平衡位置附近的振动速度 v 、空气的压强 p 和密度 ρ . 物体的振动引起周围空气压强和密度的变化, 使空气中形成疏密相间的状态, 这种疏密相间状态向周围的传播形成声波.

记空气处于平衡状态时的压强和密度分别为 p_0 , ρ_0 , 并把声波中的空气密度相对变化量 $(\rho - \rho_0)/\rho_0$ 记为 s ,

$$s = \frac{\rho - \rho_0}{\rho_0}, \quad \rho = \rho_0(1 + s).$$

由于空气的振动速度 $|v| \ll$ 声速, v 是很小的量, 且假定: 声振动不过分剧烈, s 也是很小的量. 声振动时空气可以看作没有黏性的理想流体, 声波的传播过程可当作绝热过程, 借助于理想流体的欧拉型运动方程、连续性方程和绝热过程的物态方程, 在不受外力的情况下, 略去 v 和 s 的二次以上的小量, 可以导出声波方程(其推导本书从略)

$$s_{tt} - a^2 \Delta_3 s = 0 \quad \left(a^2 = \frac{\gamma p_0}{\rho_0} \right). \quad (7.1.18)$$

其中 γ 为空气定压比热容与定容比热容的比值.

假设在声波传播过程中, 空气是无旋的, 即 $\nabla \times v = 0$. 由于对任何存在二阶偏导数的标量函数 $\varphi(x, y, z)$, 有 $\nabla \times \nabla \varphi \equiv 0$. 总可以找到一个标量函数 $u(x, y, z, t)$ 满足 $v(x, y, z, t) = -\nabla u(x, y, z, t)$, u 称为速度势. 进而可得 u 遵从的声波方程为

$$u_{tt} - a^2 \Delta_3 u = 0 \quad \left(a^2 = \frac{\gamma p_0}{\rho_0} \right), \quad (7.1.19)$$

跟方程(7.1.18)形式相同.

(六) 电磁波方程

利用电磁场的麦克斯韦方程组的微分形式，可导出真空中的电磁波方程，在国际单位制下，方程为

$$\mathbf{E}_{tt} - a^2 \Delta_3 \mathbf{E} = 0, \quad (7.1.20)$$

和
$$\mathbf{H}_{tt} - a^2 \Delta_3 \mathbf{H} = 0. \quad (7.1.21)$$

其中 $a^2 = 1/\mu_0 \epsilon_0 =$ 光速平方， ϵ_0 、 μ_0 分别为真空中介电常数和磁导率， \mathbf{E} 、 \mathbf{H} 为真空中电场强度和磁场强度，均为矢量方程。

(七) 扩散方程

由于浓度(单位体积中的分子数或质量)的不均匀，物质从浓度大的地方向浓度小的地方转移，这种现象叫作扩散。扩散现象广泛存在于气体、液体和固体中。

制做半导体器件就常用扩散法。把含有所需杂质的物质涂敷在硅片表面，或者用携带杂质的气体包围着硅片，把硅片放在扩散炉里，杂质就向硅片里面扩散，扩散运动的方向基本上是垂直于硅片表面而指向硅片深处。这种只沿某一方向进行的扩散叫作一维的扩散。

在扩散问题中研究的是浓度 u 在空间中的分布和在时间中的变化 $u(x, y, z, t)$ 。

扩散运动的起源是浓度的不均匀。浓度不均匀的程度可用浓度梯度 ∇u 表示。扩散运动的强弱可用扩散流强度 \mathbf{q} ，即单位时间里通过单位横截面积的原子数或分子数或质量表示。

根据实验结果，扩散现象遵循的扩散定律即斐克定律是

$$\mathbf{q} = -D \nabla u. \quad (7.1.22)$$

或写成分量形式

$$q_x = -D \frac{\partial u}{\partial x}, \quad q_y = -D \frac{\partial u}{\partial y}, \quad q_z = -D \frac{\partial u}{\partial z} \quad (7.1.23)$$

负号表示扩散转移的方向(浓度减小的方向)跟浓度梯度(浓度增大的方向)相反。比例系数 D 叫作扩散系数。不同物质的扩散系数各不一样。同一物质在不同温度的扩散系数也不同，一般说，温度越高，扩散系数越大。

现在应用扩散定律和粒子数守恒定律(或质量守恒定律)导出三维扩散方程。为此，把空间加以细分，拿 x 与 $x + dx$ 之间， y 与 $y + dy$ 之间， z 与 $z + dz$ 之间的小平行六面体(图 7-5)为代表加以研究。这个平行六面体里的浓度变化取决于穿过它的表面的扩散流。

先考察单位时间内 x 方向的扩散

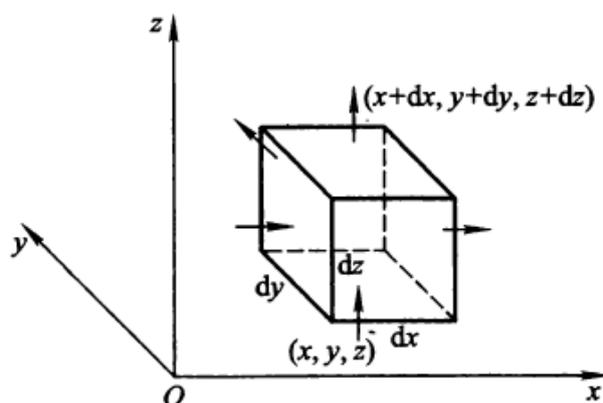


图 7-5

流. 在左表面, 流量 $q_x|_x dydz$ 是流入平行六面体的; 在右表面, 流量 $q_x|_{x+dx} dydz$ 则是流出的, 由于 dx 取得很小, $q_x|_{x+dx} - q_x|_x = \frac{\partial q_x}{\partial x} dx$. 出入相抵,

$$\begin{aligned} \text{单位时间内 } x \text{ 方向净流入流量} &= -(q_x|_{x+dx} - q_x|_x) dydz \\ &= -\frac{\partial q_x}{\partial x} dx dydz \\ &= \frac{\partial}{\partial x} \left(D \frac{\partial u}{\partial x} \right) dx dydz. \end{aligned}$$

考察 y 方向、 z 方向的扩散流, 同理可得

$$\text{单位时间内 } y \text{ 方向净流入流量} = \frac{\partial}{\partial y} \left(D \frac{\partial u}{\partial y} \right) dx dy dz,$$

$$\text{单位时间内 } z \text{ 方向净流入流量} = \frac{\partial}{\partial z} \left(D \frac{\partial u}{\partial z} \right) dx dy dz.$$

根据粒子数(或质量)守恒定律, 如果平行六面体中没有源和汇(其他物质能转化成这种物质的粒子称为源, 这种物质的粒子转化成其他物质称为汇), 则平行六面体中单位时间内增加的粒子数等于单位时间内净流入的粒子数, 即

$$\frac{\partial u}{\partial t} dx dy dz = \left[\frac{\partial}{\partial x} \left(D \frac{\partial u}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(D \frac{\partial u}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(D \frac{\partial u}{\partial z} \right) \right] dx dy dz.$$

其中 $\partial u / \partial t$ 为浓度的时间增长率, 即单位时间内平行六面体中单位体积内增加的粒子数, 于是得三维扩散方程

$$u_t - \left[\frac{\partial}{\partial x} \left(D \frac{\partial u}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(D \frac{\partial u}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(D \frac{\partial u}{\partial z} \right) \right] = 0. \quad (7.1.24)$$

如果扩散系数在空间中是均匀的, 则(7.1.24)简化为

$$u_t - a^2 (u_{xx} + u_{yy} + u_{zz}) = 0, \quad \text{即 } u_t - a^2 \Delta u = 0 \quad (a^2 = D). \quad (7.1.25)$$

如果仅在 x 方向有扩散, 则一维扩散方程为

$$u_t - a^2 u_{xx} = 0 \quad (a^2 = D). \quad (7.1.26)$$

现在说一说有源或汇的扩散问题. 考察两种情况:

(1) 扩散源的强度(单位时间内单位体积中产生的粒子数)为 $F(x, y, z, t)$, 与浓度 u 无关. 这时, 扩散方程(7.1.24)、(7.1.25)应修改为

$$u_t - \left[\frac{\partial}{\partial x} \left(D \frac{\partial u}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(D \frac{\partial u}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(D \frac{\partial u}{\partial z} \right) \right] = F(x, y, z, t), \quad (7.1.27)$$

$$u_t - a^2 \Delta u = F(x, y, z, t) \quad (a^2 = D). \quad (7.1.28)$$

(2) 扩散源的强度与浓度 u 成正比.

例如 ^{235}U 原子核的链式反应使中子数增殖, 中子浓度增殖的时间变化率为 $b^2 u$, 比例系数 $b^2 > 0$, 即与中子浓度 u 成正比, 这是有源的情况. 一维和三维扩散方程应分别修改为

$$\begin{cases} u_t - a^2 u_{xx} - b^2 u = 0, \\ u_t - a^2 \Delta u - b^2 u = 0. \end{cases} \quad (7.1.29)$$

再如放射性衰变现象中, 原有粒子的浓度按指数律减少, $u = u_0 e^{-\lambda t}$, λ 为衰变常数 ($\lambda > 0$). 经过 τ (半衰期) 时刻后, 浓度减为原来的一半, 即 $u_0/2 = u_0 e^{-\lambda \tau}$, 所以 $\lambda = (\ln 2)/\tau$, 于是 $u = u_0 e^{-(\ln 2)t/\tau}$. 对 t 求导数, 则得单纯由蜕变所导致的浓度减少的时间变化率为 $-\lambda u = -u(\ln 2)/\tau$, 也跟原有粒子浓度成正比, 但比例系数 $-\lambda = -(\ln 2)/\tau < 0$. 相应地, 一维和三维扩散方程应分别修改为

$$\begin{cases} u_t - a^2 u_{xx} + \frac{\ln 2}{\tau} u = 0, \\ u_t - a^2 \Delta u + \frac{\ln 2}{\tau} u = 0. \end{cases} \quad (7.1.30)$$

(八) 热传导方程

由于温度不均匀, 热量从温度高的地方向温度低的地方转移, 这种现象叫作热传导.

在热传导问题中研究的是温度在空间中的分布和在时间中的变化 $u(x, y, z, t)$.

热传导的起源是温度的不均匀. 温度不均匀的程度可用温度梯度 ∇u 表示. 热传导的强弱可用热流强度 q , 即单位时间通过单位横截面积的热量表示.

根据实验结果, 热传导现象所遵循的热传导定律, 即傅里叶定律是

$$q = -k \nabla u,$$

比例系数 k 叫作热传导系数. 不同物质的热传导系数各不一样.

仿照扩散问题, 应用热传导定律和能量守恒定律, 可导出没有热源和热汇的一维和三维热传导方程

$$c\rho u_t - \frac{\partial}{\partial x}(ku_x) = 0, \quad (7.1.31)$$

$$c\rho u_t - \left[\frac{\partial}{\partial x}(ku_x) + \frac{\partial}{\partial y}(ku_y) + \frac{\partial}{\partial z}(ku_z) \right] = 0, \quad (7.1.32)$$

其中 c 是比热容, ρ 是密度, 对于均匀物体, k, c, ρ 是常数, 上式成为

$$u_t - a^2 u_{xx} = 0, \quad (7.1.33)$$

$$u_t - a^2 \Delta_3 u = 0, \quad \left(a^2 = \frac{k}{c\rho} \right) \quad (7.1.34)$$

跟扩散方程(7.1.26)、(7.1.25)形式上完全一样.

如果在物体中存在热源, 热源强度(单位时间在单位体积中产生的热量)为 $F(x, y, z, t)$, 热传导方程(7.1.31)、(7.1.32)应修改为

$$c\rho u_t - \frac{\partial}{\partial x}(ku_x) = F(x, t), \quad (7.1.35)$$

$$c\rho u_t - \left[\frac{\partial}{\partial x}(ku_x) + \frac{\partial}{\partial y}(ku_y) + \frac{\partial}{\partial z}(ku_z) \right] = F(x, y, z, t). \quad (7.1.36)$$

对于均匀物体, (7.1.35)和(7.1.36)可化为

$$u_t - a^2 u_{xx} = f(x, t), \quad (7.1.37)$$

$$u_t - a^2 \Delta_3 u = f(x, y, z, t), \quad \left(a^2 = \frac{k}{c\rho} \right) \quad (7.1.38)$$

其中 $f(x, t) = F(x, t)/c\rho$, $f(x, y, z, t) = F(x, y, z, t)/c\rho$, 分别为一维和三维情况下, 按单位质量单位热容量计算的热源强度.

(九) 稳定浓度分布

如果扩散源强度 $F(x, y, z)$ 不随时间变化, 扩散运动持续进行下去, 最终稳定状态, 空间中各点的浓度不再随时间变化, 即 $u_t = 0$, 于是, (7.1.27) 成为 $\nabla \cdot (D\nabla u) = -F(x, y, z)$, 如 D 是常数, 有

$$D\Delta u = -F(x, y, z), \quad (7.1.39)$$

这是泊松方程. 如没有源, 则是拉普拉斯方程

$$\Delta u = 0. \quad (7.1.40)$$

(7.1.39)和(7.1.40)是浓度的稳定分布方程.

(十) 稳定温度分布

如果热源强度 $F(x, y, z)$ 不随时间变化, 热传导持续进行下去, 最终将达到稳定状态, 空间中各点的温度不再随时间变化, 即 $u_t = 0$, 于是, (7.1.36) 成为 $\nabla \cdot (k\nabla u) = F(x, y, z)$, 如 k 是常数,

$$k\Delta u = -F(x, y, z) \quad (7.1.41)$$

也是泊松方程, 如没有热源, 也简化为拉普拉斯方程

$$\Delta u = 0. \quad (7.1.42)$$

(7.1.41)和(7.1.42)是温度的稳定分布方程.

(十一) 静电场

从电磁学知道, 静电场是有源无旋场, 电场线不闭合, 始于正电荷, 终于负电荷, 反映静电场基本性质的是高斯定理和电场强度的无旋性. 据此, 我们来导出描述静电场的数学物理方程.

用国际单位制, 高斯定理可以表述为: 穿过闭合曲面 Σ 向外的电场强度通量等于闭合曲面 Σ 所围空间 T 中电量的 $1/\epsilon_0$ 倍 (ϵ_0 为真空介电常数), 即

$$\oint_{\Sigma} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = \frac{1}{\epsilon_0} \int_T \rho dV.$$

把左边的曲面积分改为体积积分,

$$\int_T \nabla \cdot \mathbf{E} dV = \frac{1}{\epsilon_0} \int_T \rho dV.$$

上式对任意的空间 T 都成立, 这只能是由于两边的被积函数相等,

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{1}{\epsilon_0} \rho. \quad (7.1.43)$$

此外，静电场的电场强度 \mathbf{E} 是无旋的，即

$$\nabla \times \mathbf{E} = 0 \quad (7.1.44)$$

(7.1.43)和(7.1.44)是静电场的基本微分方程. 它们也可从微分形式的麦克斯韦方程组得到. 事实上，对真空中的静电场， $\mathbf{D} = \epsilon_0 \mathbf{E}$ ， $\mathbf{B} = 0$ ，代入麦克斯韦方程 $\nabla \cdot \mathbf{D} = \rho$ 和 $\nabla \times \mathbf{E} = -\mathbf{B}_t$ 即得.

由(7.1.43)，存在电势函数 $V(x, y, z)$ ，使

$$\mathbf{E} = -\nabla V. \quad (7.1.45)$$

将(7.1.45)代入(7.1.43)得

$$\Delta V = -\frac{1}{\epsilon_0} \rho. \quad (7.1.46)$$

这就是静电场的电势函数 V 应当满足的静电场方程，它是泊松方程. \mathbf{E} 是矢量，而 V 是标量，求解方程(7.1.46)比较方便.

如果在静电场的某一区域里没有电荷，即 $\rho = 0$ ，则电势函数 V 的静电场方程(7.1.46)在该区域上简化为拉普拉斯方程

$$\Delta V = 0 \quad (7.1.47)$$

(十二) 恒定电流场

这里研究的是具有恒定电流的导电介质中的电场. 根据电荷守恒定律，导电介质中电荷满足连续性方程

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot \mathbf{j} = 0 \quad (7.1.48)$$

其中 $\rho(x, y, z, t)$ 为自由电荷体密度， $\mathbf{j}(x, y, z, t)$ 为传导电流的体密度. (7.1.48)对任意变化的电流场均成立. 在恒定电流情况下， $\mathbf{j}(x, y, z)$ 不随时间 t 变化，电荷密度 $\rho(x, y, z)$ 也不随时间变化，因而 $\partial \rho / \partial t = 0$ ；于是

$$\nabla \cdot \mathbf{j} = 0, \quad (7.1.49)$$

称为恒定电流的连续性方程. 对于恒定电流场，从任一闭合面流出的电流总是等于流入的电流，因此可用闭合的电流线描述导电介质的恒定电流场. 电流的散度 $\nabla \cdot \mathbf{j}$ 代表电流源的强度. 对恒定电流场， $\nabla \cdot \mathbf{j} = 0$ ，即表示没有电流源.

由于电流是恒定的，产生的磁场也是恒定的. 据麦克斯韦方程组中的第二方程，有

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\mathbf{B}_t = 0, \quad (7.1.50)$$

可知恒定电流场的电场强度 \mathbf{E} 是无旋的. 而 \mathbf{E} 和恒定电流也遵从欧姆定律

$$j = \sigma E. \quad (7.1.51)$$

因为 E 是无旋的, 一定存在一个标量函数 $\varphi(x, y, z)$, 满足

$$E = -\nabla\varphi, \quad (7.1.52)$$

$\varphi(x, y, z)$ 是恒定电流场的电势函数. 将(7.1.51)、(7.1.52)代入(7.1.49), 有

$$\nabla \cdot (\sigma E) = -\nabla \cdot (\sigma \nabla\varphi) = 0. \quad (7.1.53)$$

对于均匀导电介质, $\sigma = \text{常数}$. (7.1.53)可简化成

$$\Delta\varphi = 0. \quad (7.1.54)$$

这是拉普拉斯方程, 它是在电源外部的均匀导电介质中, 恒定电流势 $\varphi(x, y, z)$ 所满足的方程.

但是, 在一些问题中, 人们的注意力集中在某个局部空间. 例如, 在大地电测中, 关心的是大地中的恒定电流分布和恒定电流势的分布, 对大地外面的电源和线路并不关心. 这是, 往往把电极 A 看作恒定电流的源, 把电极 B 看作恒定电流的汇(见图 7-6). 于是(7.1.49)应代之以

$$\nabla \cdot j = f(x, y, z), \quad (7.1.55)$$

其中 $f(x, y, z)$ 是电流源强度的分布. 而式(7.1.54)也应代之以泊松方程

$$\Delta\varphi = -f(x, y, z) \quad (7.1.56)$$

(十三) 不可压缩流体的无旋定常流动

流体有源或汇时的连续性方程是

$$\frac{\partial\rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho v) = F(x, y, z, t), \quad (7.1.57)$$

其中 $F(x, y, z, t)$ 为源或汇的强度, 即单位时间内单位体积中产生的流体的质量, $F > 0$ 为源, $F < 0$ 为汇. 对于不可压缩的流体, 密度 $\rho = \text{常数}$, 因此 $\partial\rho/\partial t = 0$, 又 $\nabla \cdot (\rho v) = \rho \nabla \cdot v + v \cdot \nabla\rho = \rho \nabla \cdot v$, 从而连续性方程简化成

$$\nabla \cdot v = f(x, y, z, t), \quad (7.1.58)$$

其中 $f(x, y, z, t) = F(x, y, z, t)/\rho$, 为按流体的单位质量计算的源或汇的强度.

若流体流动是无旋的, $\nabla \times v = 0$, 则一定存在标量函数 $\varphi(x, y, z, t)$, 使得

$$v = -\nabla\varphi, \quad (7.1.59)$$

φ 称为速度势. 将(7.1.59)代入(7.1.58), 得

$$\Delta\varphi = -f(x, y, z, t), \quad (7.1.60)$$

这就是不可压缩流体无旋流动时速度势满足的泊松方程.

如果流动是定常的, 密度 $\rho(x, y, z)$ 和源或汇的强度 $F(x, y, z)$ 都与时间 t 无关, 从而 $f(x, y, z)$, $v(x, y, z)$, $\varphi(x, y, z)$ 也与 t 无关. 方程(7.1.60)简化成

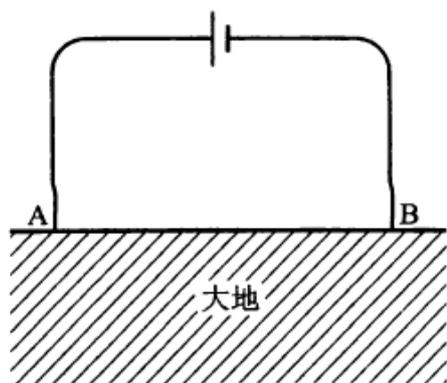


图 7-6

$$\Delta\varphi(x, y, z) = -f(x, y, z). \quad (7.1.61)$$

如果在某一区域里没有流体的源或汇, 则(7.1.61)在该区域上进一步简化为拉普拉斯方程

$$\Delta\varphi(x, y, z) = 0. \quad (7.1.62)$$

(十四) 杆的微小横振动

杆在横向变形时, 存在切应力. 在切应力的作用下, 杆作横向振动. 对于微小的横振动, 杆的横振动方程是(本书不推导)

$$u_{tt} + a^2 u_{xxxx} = 0 \quad (a^2 = EI/\rho), \quad (7.1.63)$$

其中 E 是杨氏模量, I 是转动惯量, ρ 是密度. 方程中出现关于空间坐标 x 的四阶偏导数, 而前面导出的各种方程对空间坐标的偏导数都是二阶的.

对于杆的受迫横振动, 如果单位长度杆上外加横向力是 $F(x, t)$, 则相应的方程为

$$u_{tt} + a^2 u_{xxxx} = F(x, t)/\rho = f(x, t), \quad (7.1.64)$$

其中 $f(x, t)$ 为作用于杆的单位质量上的力密度.

(十五) 量子力学的薛定谔方程

以上各例引自古典物理学. 作为另一类例子, 这里提一下量子力学的薛定谔方程. 微观粒子在势场 $V(x, y, z, t)$ 中, 波函数 u (为符号前后一贯起见, 这里用 u 表示波函数, 而在量子力学中通常是用 ψ) 满足薛定谔方程

$$i\hbar u_t = -\frac{\hbar^2}{2m}\Delta u + Vu. \quad (7.1.65)$$

这里系数中出现虚数单位 i , 而前面所讲方程的系数全是实数. 势能 V 不显含时间 t 的情况叫作定态. 对于定态, 方程(7.1.65)简化为定态薛定谔方程

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\Delta u + Vu = Eu. \quad (7.1.66)$$

习 题

1. 拿图 7-7 的 B 段弦作为代表, 推导弦振动方程.
2. 用均质材料制做细圆锥杆, 试推导它的纵振动方程.
3. 弦在阻尼介质中振动, 单位长度的弦所受阻力 $F = -Ru_t$ (比例常数 R 叫作阻力系数), 试推导弦在这阻尼介质中的振动方程.
4. 试推导一维和三维的热传导方程 (7.1.41) 和 (7.1.42).
5. 混凝土浇灌后逐渐放出“水化热”, 放热速率正比于当时尚储存着的水化热密度 Q , 即 $\frac{dQ}{dt} = -\beta Q$.

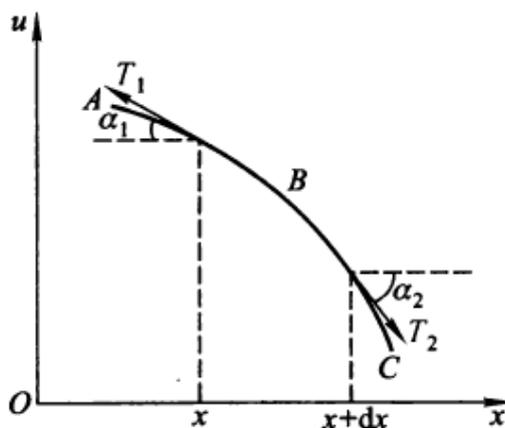


图 7-7

试推导浇灌后的混凝土内的热传导方程.

6. 均质导线电阻率为 r , 通有均匀分布的直流电, 电流密度为 j . 试推导导线内的热传导方程.
7. 长为 l 柔软均质轻绳, 一端固定在以匀速 ω 转动的竖直轴上. 由于惯性离心力的作用, 这弦的平衡位置应是水平线. 试推导此弦相对于水平线的横振动方程.
8. 长为 l 的柔软均质重绳, 上端固定在以匀速 ω 转动的竖直轴上, 由于重力作用, 绳的平衡位置应是竖直线. 试推导此绳相对于竖直线的横振动方程.
9. 推导均匀圆杆的扭转振动方程. 杆半径为 R , 切变模量为 N .
10. 推导水槽中的重力波方程. 水槽长 l , 截面为矩形, 两端由刚性平面封闭. 槽中的水在平衡时深度为 h .